Урок №13 (29.10.2019)
Принцип суперпозиции. Отражение волн. Стоячие волны.

0. Краткое повторение.

- Продольные и поперечные волны.
- Расстояние между ближайшими точками среды, находящимися в одной фазе колебания, называется *длиной волны* (λ).
- Минимальный интервал между ближайшими моментами, в которые элемент упругой среды находится в одной фазе, называется *частотой волны* (f) – обратим внимание, что другими словами это просто частота колебаний точки среды.
- Максимальное смещение, испытываемое точкой среды в процессе распространения волны, называется *амплитудой волны* (A).
- Математическое уравнение волны: $D(x,t) = D_M \sin(kx - \omega t + \alpha_0)$, где $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, α_0 – начальная фаза.
- Фаза волны: $kx - \omega t + \alpha_0$.
- Фронт волны – множество точек пространства с одинаковой фазой.
- Волна переносит энергию и импульс, но не переносит вещество.
- Скорость распространения волны (фазовая скорость) $v = \lambda/T$, где $T = 1/f$ – *период волны*.
- Для скорости распространения волны справедливо выражение: $u \sim \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, где F характеризует силы упругого взаимодействия частиц среды между собой, а μ – массу этих частиц.
- *Интенсивностью (I)* волны называется энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. $I \sim A^2 \cdot f^2$

1. Сферическая волна.

Модель сферической волны: бесконечная кубическая решётка, в узлах расположены частицы, рёбра – пружинки; одна из частиц сдвигается из положения равновесия…

У сферической волны (фактически, у любой волны от точечного источника) площадь распространения – это площадь сферы $4\pi r^2$, пропорциональна квадрату расстояния до источника. Из закона сохранения энергии следует, что $A^2S = const$, откуда получим: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$, т.е. закон затухания сферической волны.

Очевидно, что для интенсивности волны справедливо отношение: $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$.

Полученный закон справедлив для самых разных волн: звуковых, ударных, световых, сейсмических и т.д.

В идеальной одномерной волне интенсивность и амплитуда не уменьшаются.

2. Принцип суперпозиции.

При прохождении нескольких волн через одну точку пространства, смещение в этой точке равно сумме (или векторной сумме) смещений от отдельных волн. Этот принцип носит название *принцип суперпозиции*. В данном случае мы говорим о мгновенном смещении.

Когерентными называют две волны, разность фаз в которых остаётся постоянной во времени для любой точки пространства, через которую проходят эти волны.

Если две волны имеют постоянный сдвиг фаз в разных точках, т.е. *когерентны*, то при их сложении наблюдается *интерференция*. Соответственно в разных точках пространства волны могут как гасить друг друга (гасящая интерференция), так и усиливать друг друга (усиливающая интерференция).

Иллюстрация интерференции волн: https://www.desmos.com/calculator/ae1ojhguyw

В случае бегущей волны при интерференции изменяется амплитуда волны в данной точке; в разные моменты времени, при этом, отклонение различно!

При интерференции не обязательно, чтобы волны были «одинаковыми». Например, представим себе две плоские волны, распространяющиеся по воде в разных направлениях – в этом случае длина волн может быть различна, но если правильно подобрать направления распространения волн, то может возникнуть интерференционная картина.

3. Отражение одномерной продольной волны от края.

Во-первых, сразу заметим, что идеальная волна, описываемая уравнением $D(x,t) = D_M \sin(kx - \omega t)$, по определению бесконечна, т.е. распространяется в бесконечной упругой среде.

Однако если среда конечна, или иными словами имеет границу, за которой плотность её меняется, то волна на этой границе претерпевает целый ряд изменений: в общем случае часть волны *преломляется*, часть *отражается*, а часть *поглощается*. Про преломление и поглощение волн поговорим позже, а пока рассмотрим отражение.

Рассмотрим распространение волны вдоль верёвки, лежащей на абсолютно гладком столе. Заставим один конец верёвки совершать поперечные колебания. Можно мысленно проследить за распространением волны вдоль верёвки с течением времени.

Представим теперь себе, что верёвка не бесконечна; возможны два случая – её конец закреплён, или остаётся свободным. И в том, и в другом случае происходит *отражение волны*.

При отражении волны от *закреплённого края*, фаза волны меняется на π, так как сумма падающей и отражённой волн должна быть всегда в этой точке равна нулю (край закреплён). При отражении от *свободного края* фаза волны не меняется.

Можно вместо верёвки рассмотреть простейшую модель одномерной волны – шарики, связанные пружинками. Если последний шарик не закреплён (т.е. у нас так называемый случай свободного края упругой среды), то при отражении фаза волны не меняется. Крайний шарик совершает полное колебание, возвращается назад и передаёт колебание назад по упругой среде.

Если же крайний шарик закреплён, то происходит «сбой» в фазе колебания и назад передаётся волна, на пол периода опережающая падающую: только в этом случае сумма падающей и отражённой волны даст всегда нулевую амплитуду.

4. Стоячие волны

Рассмотрим две одномерные волны с одинаковой амплитудой и частотой, распространяющиеся навстречу друг другу.

$D_1 = D_M \sin(kx - \omega t)$ – волна, распространяющаяся в положительном направлении.

Отражённая волна будет иметь начальную фазу π и двигаться в противоположном направлении, то есть будет определяться функцией:

$D_2 = D_M \sin(-kx - \omega t + \pi)$, или

$D_2 = D_M \sin(kx + \omega t)$.

Согласно принципу суперпозиции сумма двух волн будет $D = D_1 + D_2 = D_M \left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)\right]$.

$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\left[\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right]$

В итоге получаем, $\boxed{D = 2D_M \sin kx \cdot \cos\omega t}$.

Заметим, что $D\big|_{x=0} = D\big|_{x=L} = 0$ – струна закреплена, что выполняется при $kL = n\pi$. Вспомним, что $k = 2\pi/\lambda$, откуда $\lambda_n = 2L/n$.

Обратим внимание, что частицы колеблются с амплитудами $2D_M \sin kx$*, т.е. <u>в разных точках стоячей волны амплитуды разные</u>. В точках с* $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4...$ *амплитуда стоячей волны имеет максимум. В точках с координатой* $x = 0, \lambda/2, \lambda\ldots$ *амплитуда равна нулю – в этих точках колебания не происходят.*

Хорошо известный приём при игре на гитаре – флажолет, использует именно этот эффект нулевой амплитуды в некоторых точках.

Энергия в стоячей волне не переносится.

- Механизм возникновения стоячей волны.
- Узлы и пучности.
- Собственная (резонансная) частота.
- Гармоники (моды) и основной тон, $L = n\lambda_n/2$, где L – фиксированная длина струны, а λ_n – длина волны моды.

5. *Волновая поверхность.*

Все точки среды, лежащие на *волновой поверхности*, имеют в данный момент одну и ту же фазу. Частным случаем волновой поверхности является *фронт волны*.

Семейство волновых поверхностей даёт наглядную картину распространения монохроматических волн в упругой среде.

Для того чтобы получить уравнение волновой поверхности, надо приравнять фазу в уравнении волны постоянной величине. Например, для плоской волны:

$$D(t,x) = D_M \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right),$$

уравнение волновой поверхности получится таким:

$$\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = C\,,$$

откуда

$$x = ut + C_1\,.$$